# වර්ග සමීකරණ

(1) a, b, c තාත්ත්වික වූ $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශනය හැමවිට ම $f(x) \equiv a(x-\alpha)(x-\boldsymbol{\beta})$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ යනු එක්කෝ

i) දෙකම තාත්ත්වික, නැතිනම්

ii) දෙකම සංකීර්ණ සංඛ්‍යායි.

a යනු ධන නියතයක් යැයි සලකා ඉහත අවස්ථා දෙක විදහා පෑම සඳහා ප්‍රස්තාර අඳින්න. a යනු ඍණ නියතයක් වූ විට මේ ප්‍රස්තාර වල ඇති වන වෙනස කුමක් ද? $x = 5$ වන විට $f(x) > 0$ $x = q\ (q > p)$ වන විට $f(x) < 0$ ද නම් $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව ද ඉන් එකම එකක් පමණක් p හා q ත් අතර පිහිටන බව ද ඉහත සැලකූ ප්‍රස්තාර මගින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ පෙන්වන්න. $x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ ද $x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ද සමීකරණ දෙකෙහි මූල පිළිවෙලින් $\boldsymbol{\alpha_1, \beta_1}$ ද $\boldsymbol{\alpha_2, \beta_2}$ ද වෙයි. $\boldsymbol{\alpha_1} < \boldsymbol{\alpha_2} < \boldsymbol{\beta_1} < \boldsymbol{\beta_2}$ නම්, $f(x) \equiv 2x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(1977)

(2) i) $ax^2 + a^2x + 1 = 0$ ද $bx^2 + b^2x + 1 = 0$ ද යන සමීකරණවලට පොදු මූලයක් තිබෙයි නම්, ඒවායේ අනෙක් මූලවලින් $abx^2 + x + a^2b^2 = 0$ වර්ගජ සමීකරණය සපිරෙන බව පෙන්වන්න.

ii) X තාත්ත්වික නම් $\dfrac{\mathbf{x^2+2x-1}}{\mathbf{2x-1}}$ ප්‍රකාශනයට 1ත් 2ත් අතර තාත්ත්වික අගයන් තිබිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(1978)

(3) a, b, c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද $a \neq \mathbf{0}$ ද විට $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ වෙයි නම් p, q, r යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වන පරිදි වූ $a\,[\mathbf{(x-p)^2 + q^2}]$ හෝ $a\,[\mathbf{(x-p)^2 - r^2}]$ හෝ ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. අවස්ථා දෙක අතර වෙනස පැහැදිලි කරන්න. $b^2 - 4ac = 0$ විට කිමෙක් වන්නේ ද?

$f_1(x) \equiv -x^2 + 2x + 3$ යන්න ඉහත ආකාර අතුරෙන් එකෙකින් ප්‍රකාශ කර එනයින් $y = f_1(x)$ ශ්‍රිතයේ දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. $f_1(x)$ හි විශාලතම අගය පැහැදිලි ලෙස රූපයේ පෙන්නුම් කරන්න.

i) $d > 5$ සඳහාත්

ii) $d < 5$ සඳහාත් $y = f_2(x) \equiv x^2 - 2x + d$ යන්නෙහි දළ ප්‍රස්තාර ඉහත කී රූපයේම අඳින්න.

$f_1(x) = f_2(x)$ වර්ගජ සමීකරණයට $d > 5$ විට තාත්වික මූල නැති බවත් $d < 5$ විට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙන බවත් අපෝහනය කරන්න. $d = 5$ විට කිමෙක් වන්නේද?

[$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය වනුයේ $y$ – අක්ෂයට සමාන්තර අක්ෂයත් ඇති පරාවලයක් බව උපකල්පනය කිරීම මැනවි.] (1979)

(4) i) a, b, c යනු තාත්ත්වික නියත ද $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ ද $g(x) = 2(ax + b)$ ද නම්, $\lambda$ යනු තාත්ත්වික නියතයක් වන $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ වර්ගජ ප්‍රකාශනයේ විවේචකය ලියන්න. $f(x) = 0$ හි මූල තාත්ත්විකද ප්‍රභින්න ද නම්, $F(x) = 0$ හි මූලත් තාත්ත්වික ද ප්‍රභින්න ද බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $Y = x^2 - x - 2$ ද සහ $y = -2x + 1$ ද යන සමීකරණ ඇති වක්‍රයේත් සරල රේඛාවලත් දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. $x^2 - x - 2 = 0$ හි මූල අතර පිහිටියේ, $x^2 - x - 2 + (2x - 1) = 0$

$x^2 - x - 2 - (2x - 1) = 0$ යන වර්ගජ සමීකරණ එක එකෙහි මූලවලින් එකක් බැගින් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න. (1981)

(5) i) $\alpha, \beta$ යනු a ද නියත වන, $x^2 + ax + b = 0$ වර්ගජ සමීකරණ මූල වේ. $S_0 = 2$ ද $S_n = \alpha^n + \beta^n$ $n = 1, 2 \ldots\ldots$ ද නම්, $S_n + aS_{n-1} + bS_{n-2} = 0, n = 2,3\ldots\ldots$ බව පෙන්වන්න. මේ නයින්, a ත් b ත් ඇසුරෙන් $\alpha^5 + \beta^5$ ද $\frac{1}{\alpha^5}$ ත් $\frac{1}{\beta^5}$ ත් මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය ද සොයන්න.

ii) n (>2) යනු ඔත්තේ ධන නිඛිලයක් නම්, $x^2 - 1$න් $x^n + 2$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $x + 2$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(6) වර්ගජ සමීකරණයක මූලවල ඓක්‍ය, සහ ගුණිතය සඳහා ප්‍රකාශන එහි සංගුණක ඇසුරෙන් ලබාගන්න. $\alpha$ සහ $\beta$ යනු $x^2 + px + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල නම් $\alpha + \lambda$ සහ $\beta + \lambda$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න. මෙහි $\lambda$ යනු නියතයක් වේ. තව ද $\gamma, \delta$ යනු $x^2 + qx + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්,

$(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = q^2 - p^2$ බව සාධනය කරන්න. (1987)

(7) i) වර්ගජ සමීකරණයක මූලවල ඓක්‍ය සහ ගුණිතය සඳහා ප්‍රකාශන එහි සංගුණක ඇසුරෙන් ලබාගන්න. $\alpha$ සහ $\beta$ යනු $(a + x)(b + x) - c(a + x) - d(b + x) = 0$ හි මූල නම්

$(\alpha - \beta)^2 = (a - b + c - d)^2 + 4cd$ බව පෙන්වන්න. a, b, c, d තාත්ත්වික ද c, d දෙකම ධන හෝ දෙකම සෘණ ද නම් $\alpha$ සහ $\beta$ තාත්වික බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $a > 0$ සහ $b^2 < 4ac$ නම් x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශන ධන බව පෙන්වන්න. $(x^2 - x - 2)(x^2 + x + 1)(x - 3)$ ප්‍රකාශනය ධන වන x හි අගය පරාසය සොයන්න. (1988)

(8) i) a, b, c නියත වන $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වන $\alpha, \beta$ ඇසුරෙන් $acx^2 - b(c + a)x + (c + a)^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල ප්‍රකාශ

ii) $\frac{x^2+9x-20}{x^2-11x+30} \geq -1$ අසමානතාව සත්‍ය වන x හි අගය පරාසය සොයන්න. (1989)

(9) i) p සහ q යනු $x^2+2kx+k+2=0$ සමීකරණයෙහි මූල වෙයි. මෙහි k නියතයකි.

අ) $(p-q)^2=4(k^2-k-2)$ බව පෙන්වන්න. එනයින් මූල අතර අන්තරය 4 වූ ඉහත ආකාරයේ සමීකරණය ලියන්න.

ආ) $k\neq -2$ යැයි දී ඇති විට $\frac{p^2}{q}$ සහ $\frac{q^2}{p}$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න.

ii) $\frac{(x+2)(3x-1)}{4x^3-3x+1}>0$ අසමානතාව සපුරාලන x හි අගයන් හි පරාසය සොයන්න.(1990)

(10) i) $t=x+\frac{1}{x}$ යයි ලියමින් $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ සමීකරණයෙහි මූල සියල්ලම සොයන්න.

ii) $E=x^4-4x^3+9x^2-10x+7$ යයි ගනිමු. $y^2+y+a$ ආකාරයෙන් E ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි a නියතයක් ද y යන්න b හා c නියතයන් වන $x^2+bx+c$ ආකාරයෙන් ද වේ. එනයින් සියලුම තාත්ත්වික x සඳහා $E>3$ බව පෙන්වන්න.

iii) $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}=\frac{k}{x-2}+\frac{f(x)}{(x-1)^3}$ වන සේ k නියතයක් සහ x හි ශ්‍රිතයක් වන f සොයන්න. (x − 1) හි බහුපදයක් ලෙස f(x) ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}$ හි භින්න භාග සොයන්න. (1992)

(11) $x^2+bx+c=0$ සමීකරණයෙහි මූල $\alpha$ සහ $\beta$ වේ. මෙහි b සහ c තාත්ත්විකය. $\alpha^3$ සහ $\beta^3$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න. $b^3-6b+9=0$ සහ $c=2$ නම්, $\alpha$ සහ $\beta$ තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න. එනයින් $y^3-6y+9=0$ හි තාත්ත්වික මූලය සොයන්න. (1994)

(12) (a + b) යනු $x^3-3abx-(a^3+b^3)=0$ සමීකරණයේ මූලයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න. a හා b $(a\neq b)$ තාත්ත්වික නම් ඉහත සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් ඇති බව සාධනය කරන්න. $x^3-6x-6=0$ සමීකරණය ඉහත ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර එයට ඇත්තේ තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් යැයි දී ඇත්නම් එම මූලය සොයන්න. (1995)

(13) i) a, b, c යනු $a\neq 0$ වන සේ වූ තාත්ත්වික නියත විට $ax^2+bx+c=0$ සමීකරණයෙහි $\alpha,\beta$ මූල තාත්ත්වික වීම සඳහා අවශ්‍යතාවක් සොයන්න. $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ සහ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ බව පෙන්වන්න.

තවද $(4\alpha-3\beta)(4\beta-3\alpha)=\frac{49ac-12b^2}{a^2}$ බව ද පෙන්වා $12b^2<49ac<\frac{49}{4}b^2$ නම් $\frac{3\alpha}{4}$ සහ $\frac{4\alpha}{3}$ අතර $\beta$ පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

ii) p, q, r $(p\neq 0)$ යනු තාත්ත්වික නියත විට $px^4+qx^3+rx^2-qx+p=0$ සමීකරණය y හි වර්ගජ සමීකරණයට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $y=x-\frac{1}{x}$ ඒනයින් ඉහත දක්වා ඇති x සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල තිබීම සඳහා p, q, r මඟින් සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතාවක් සොයන්න. (1996)

(14) $\alpha$ සහ $\beta$ යනු $x^2 + qx + 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල යැයිද $\gamma$ සහ $\delta$ යනු $x^2 + x + q = 0$ සමීකරණයෙහි මූල යැයිද සිතමු.
$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + q\gamma + 1)(\delta^2 q\delta +)$ බව පෙන්වන්න. දී ඇති වර්ගජ සමීකරණ දෙකටම පොදු වූ තාත්ත්වික මූල අඩු වශයෙන් එකක්වත් තිබෙන පරිදි වූ q අගය සියල්ල නිර්ණය කරන්න. (1997)

(15) අ) $\alpha$ සහ $\beta$ යනු $x^2 - px + q = 0$ සමීකරණයෙහි මූල වේ. $\alpha(\alpha + \beta)$ හා $\beta(\alpha + \beta)$ මූල වන සමීකරණ සොයන්න.
ආ) $f(x, y) = 2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2$ ප්‍රකාශනය රේඛීය සාධක දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ලිවිය හැකි වීම සඳහා $\lambda$ හි අගයයන් සොයන්න.
ඇ) $\frac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. (2000)

(16) අ) $\alpha$ සහ $\beta$ යනු $x^2 + px + 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල සහ $\gamma$ සහ $\delta$ යනු $x^2 + \frac{1}{p}x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල යයි ද ගනිමු.
$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(a - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + p\gamma + 1)(\delta^2 + p\delta + 1)$ බව පෙන්වා
$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\ (a - \delta)(\beta - \delta) = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2$ බව අපෝහනය කරන්න.
ආ) a සහ b යනු ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම්, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ බව පෙන්වන්න.
$\frac{1}{\log_2 2001} + \frac{1}{\log_3 2001} + \frac{1}{\log_4 2001} + \cdots + \frac{1}{\log_{100} 2001} = \frac{1}{\log_{100!} 2001}$ බව පෙන්වන්න. (2001)

(17) $f(x) = x^2 + 2x + 9$, $x \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.
i) $\alpha$, $\beta$ යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම් $\alpha^2 - 1$ සහ $\beta^2 - 1$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගන්න.
ii) $f(x) = k$ සමීකරණයට x සඳහා හරියටම එක් තාත්ත්වික මූලයක් පවතින සේ වූ k තාත්ත්වික නියතයක අගය සොයන්න.
iii) $\frac{1}{f(x)}$ හි වැඩිතම අගය සොයා එය ලැබෙන්නා වූ x හි අගය ද දෙන්න.
iv) $f(x) = \lambda x$ සමීකරණයට x සඳහා තාත්ත්වික විසඳුමක් නොමැති වන සේ වූ $\lambda$ තාත්ත්වික නියතයේ අගය කුලකය නිර්ණය කරන්න. (2002)

(18) $\lambda \in \mathbb{R}$ සහ $p(x) = (\lambda - 2)x^2 - 3(\lambda + 2)x + 6\lambda$ යැයි ගනිමු.
i) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා p (x) ධන වන සේ වූ $\lambda$ හි අඩුතම නිඛිලමය අගය සොයන්න.
ii) p (x) = 0 සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්ත්වික මූල දෙකක් තිබෙන්නේ $\lambda$ හි කවර අගයයන් සඳහාද?
iii) p (x) = 0 හි මූල තාත්ත්වික ද එම මූල දෙකෙහි වෙනස 3 ට සමාන ද නම් $\lambda$ සොයන්න. (2003)

(19) a) $\lambda \in \mathbb{R}$ හා $p(x) = x^2 - 2\lambda(x - 1) - 1$ යැයි ගනිමු. p (x) = 0 හි මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න. p (x) = 0 හි මූලවල ඓක්‍යය එම මූලවල වර්ගයන්ගේ ඓක්‍යයට සමාන වන සේ වූ $\lambda$ හි සියලු අගයන් සොයන්න. (2004)

(20) $f(x) = x^2 + bx + c$ හා $g(x) = x^2 + qx + r$ යැයි ගනිමු. මෙහි $b, c, q, r \in \mathbb{R}$ හා $c \neq r$ වේ. $\alpha$, $\beta$ යනු $g(x) = 0$ හි මූල යැයි ගනිමු.
$f(\alpha)f(\beta) = (c - r)^2 - (b - q)(cq - br)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $f(x)=0$ ට හා $g(x)=0$ ට පොදු මූලයක් ඇත්නම් එවිට $b-q$, $c-r$ හා $cq-br$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටන බව සාධනය කරන්න. $\alpha, \gamma$ යනු $f(x)=0$ හි මූල නම් $\beta, \gamma$ වන වර්ගජ සමීකරණය $x^2-\frac{(c+r)(q-b)}{(c-r)}x+\frac{cr(q-b)^2}{(c-r)^2}=0$ බව පෙන්වන්න. (2005)

(21) $px^2+qx+r=0$ වර්ගජ සමීකරණයට සමපාත මූල තිබීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න. මෙහි $p, q$ සහ $r$ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $a, b$ හා $c$ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද $a$ $(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ යන වර්ගජ සමීකරණයට සමපාත මූල තිබෙයි නම් ද එවිට $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ බව පෙන්වන්න. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ප්‍රකාශනයෙහි සාධක සොයන්න. (2006)

(22) a) $\alpha$ හා $\beta$ යනු $x^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූල වේ. $\alpha^3$ හා $\beta^3$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒනයින්, $\alpha^3+\frac{1}{\beta^3}$ හා $\beta^3+\frac{1}{\alpha^3}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

b) $f(x)$ යනු මාත්‍රය 3 ට වැඩි x හි බහු පදයකි. පිළිවෙලින්, $(x-1)(x-2)$ හා $(x-3)$
යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ a, b හා c වේ. ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යෙදීමෙන් $(x-1)(x-2)(x-3)$ යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය
$\lambda\ (x-1,)(x-2)+\mu(x-1)+\upsilon$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $\lambda, \mu$ හා $\upsilon$ යනු නියත වේ. a, b හා c ඇසුරෙන් $\lambda, \mu$ හා $\upsilon$ සොයන්න. (2007)

(23) $\alpha$ හා $\beta$ යනු $x^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි $c\neq 0$ වේ. $\alpha^4$ හා $\beta^4$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒ නයින්, $\frac{\alpha^4}{\beta^4}+1$ හා $\frac{\beta^4}{\alpha^4}+1$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. (2008)

(24) $\alpha$ හා $\beta$ යනු $x^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි $c\neq 0$ වේ. $\alpha^3\beta^2$ හා $\alpha^2\beta^3$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒ නයින්, $\alpha^3\beta^2+\frac{1}{\alpha^2\beta^3}$ හා $\alpha^2\beta^3+\frac{1}{\alpha^3\beta^2}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. (2009)

(25) a) $\alpha$ හා $\beta$ යනු $f(x)\equiv x^2+px+q=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි p හා q තාත්ත්වික වන අතර $2p^2+q\neq 0$ වේ. $y(p-x)=p+x$ නම් x සඳහා $f(x)=0$ හි ආදේශ කිරීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $g(y)\equiv(2p^2+q)y^2+2(q-p^2)y+q=0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $y\neq -1$වේ. ඒ නයින්, $g(y)=0$ සමීකරණයේ මූල $\alpha$ හා $\beta$ ඇසුරෙන් සොයන්න. p හා q ඇසුරෙන්$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2$ ප්‍රකාශ කරන්න.

b) a, b, c හා m යනු $a+b+c=0$ හා $ab+bc+ca+3m=0$ වන ආකාරයේ නියත නම්,
$(y+ax)(y+bx)(y+cx)=y(y^2-3mx^2)+abcx^3$ බව සාධනය කරන්න. $y=x^2+m$ නම් $(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)(x^2+cx+m)=x^6+abcx^3+m^3$ බව පෙන්වන්න.

$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ ට $(x^2 - 2x + m)(x^2 + ax + m)$ හා $(x^2 + bx + m)$ යන සාධක තිබේ නම් m, a හා b හි අගයයන් සොයන්න. ඒ නයින්,

i) සියලු x සඳහා g(x) සෘණ නොවන බව පෙන්වන්න.

ii) $g(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න. (2010)

(27) a) $\alpha$ හා $\beta$ යනු $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු. මෙහි a, b හා c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $\alpha$ හා $\beta$ දෙකම

i) $b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්ත්වික

ii) $b = 0$ හා $ac > 0$ ම නම් පමණක් හුදෙක් අතාත්ත්වික බව පෙන්වන්න. මූල $\alpha^2$ හා $\beta^2$ වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න. එක්කෝ $\alpha$ හා $\beta$ දෙකම තාත්ත්වික නැත්නම් $\alpha$ හා $\beta$ දෙකම හුදෙක් අතාත්ත්වික ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක ම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

b) $f(x) = x^3 - 3abx - (a^3 + b^3)$ යැයි ගනිමු. මෙහි a හා b යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(x - a - b)$ යනු f(x) හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. f(x) හි අනෙක් සාධකය වර්ගජ ආකාරයෙන් සොයන්න. ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ a හා b ප්‍රභින්න නම්, $f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න. $x^3 - 9x - 12 = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව අපෝහනයකර එය සොයන්න. (2011)

(27) $\alpha$ හා $\beta$ යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද $\gamma$ හා $\delta$ යනු $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද ගනිමු. මෙහි $b, c, m, n \in \mathbb{R}$ වේ.

i) b හා c ඇසුරෙන් $(\alpha - \beta)^2$ සොයා ඒනයින්, m හා n ඇසුරෙන් $(\gamma - \delta)^2$ ලියා දක්වන්න. $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ නම් $b^2 - 4c = m^2 - 4n$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) = (c - n)^2 + (b - m)(bn - cm)$ බව පෙන්වන්න.

$x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්තේ $(c - n)^2 = (m - b)$
$(bn - cm)$ ම නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න. $x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kx + 10 = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත. මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගයන් සොයන්න. (2013)

(28) $a, b, c \in |R$ යැයි ගනිමු. ශූන්‍ය $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයේ මූල $\alpha$ හා $\beta$ යැයි ද $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda + 1)^2 = b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.

$p, q, r \in |R$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයෙහි මූල $\gamma$ හා $\delta$ යැයි ද $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ වන්නේ $acq^2 = prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$kx^2 - 3x + 2 = 0$ හා $8x^2 + 6kx + 1 = 0$ සමීකරණවල මූල එකම අනුපාතයට වන බව දී ඇත. මෙහි $k \in |R$ වේ. k හි අගය සොයන්න. (2014)

(29) a) x හි මාත්‍රය 4 වූ F(x), G(x) හා H(x) යන බහුපද පහත දැක්වෙන පරිදි දෙනු ලැබේ.

$F(x) \equiv (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$. මෙහි $\alpha$ හා $\beta$ තාත්ත්වික නියත වේ;

$G(x) \equiv 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$, $\quad H(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$

i) $F(x) = 0$ හා $G(x)$ යන දෙකටම එකම මූල තිබේ නම්, $\alpha$ හා $\beta$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $6x^2 - 35x + 50 = 0$ බව පෙන්වන්න.
**ඒනයින්**, $G(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලුම මූල සොයන්න.

ii) $F(x) = H(x)$ වෙයි නම්, $\alpha$ හා $\beta$ ට තිබිය හැකි අගයන් සොයා, $H(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික **නොවන** බව පෙන්වන්න.

b) i) $f(x) \equiv 2x^4 + yx^3 + \delta x + 1$ යැයි ගනිමු. මෙහි $\gamma$ හා $\delta$ තාත්වික නියත වේ. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ හා $f(-2) = 21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

ii) සියලුම තාත්ත්වික x සඳහා $(x^2 + x + 1)\ P(x) + (x^2 - 1)\ Q(x) = 3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න. (2015)